

Série : E

N° D'ORDRE : 121

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand
pour obtenir le grade de Docteur Es-Sciences Mathématiques

par

Jean-Noël BELGY

Fonctions Arithmétiques

RESUME

21 Mars 1970



FONCTIONS ARITHMETIQUES

I L'Algèbre Λ

Définition : c'est l'ensemble, noté Λ , des applications de $\mathbb{N}^*$ (entiers > 0) dans $\mathbb{C}$ (corps des complexes). L'addition est définie de façon habituelle et le produit est le produit de convolution $f * g$ défini par $f * g(x) = \sum f(d)g(x/d)$ où d parcourt les diviseurs de x . Enfin pour tout $a \in \mathbb{C}$ on définit af par $(af)(x) = a.f(x)$

- 1) Λ est une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative unitaire et intègre, l'unité u étant la fonction définie par $u(x) = 1$ si $x = 1$ et 0 si $x > 1$.
- 2) Λ est isomorphe à l'algèbre large sur $\mathbb{C}$ du demi-groupe multiplicatif des entiers > 0
- 3) Λ est isomorphe à l'algèbre des séries formelles sur $\mathbb{C}$ en une infinité dénombrable d'indéterminées X_i , $i = 1, 2, \dots$ c'est-à-dire de la forme

$$\sum a_{(i)} x_1^{n_1} \dots x_s^{n_s}$$

chaque monôme n'ayant qu'un nombre fini d'indéterminées. On notera encore $f * g$ le produit de deux telles séries en réservant fg pour le produit "terme à terme" (voir plus loin).

- 4) Λ est isomorphe à une sous algèbre (opérations habituelles) des matrices triangulaires à une infinité de lignes et colonnes.
- 5) Λ est un anneau local d'idéal maximal $\underline{m}$ formé des f telles que $f(1) = 0$ l'anneau quotient étant isomorphe à $\mathbb{C}$.
- 6) le sous-anneau B des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}$ a ses idéaux maximaux formés des f telles que $f(1)$ soit multiple de p nombre premier. Si $\underline{m}_p$ est l'idéal correspondant on a $B/\underline{m}_p$ isomorphe à $\mathbb{Z}/(p)$.

- 7) Si $f \in A$ on appelle ordre de f , noté $\omega(f)$, le plus petit x tel que $f(x) \neq 0$. On pose $\omega(0) = +\infty$. Alors $1/\omega$ est une valeur absolue valuative qui permet de définir sur A une topologie d'espace métrique complet.
- 8) Soit $t(x) = t(p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$ (l'entier x est décomposé en les facteurs premiers p_i). On définit $t(f)$ comme le plus petit $t(x)$ tel que $f(x)$ soit non nul. Alors de la même façon que pour ω on définit une topologie d'espace métrique complet sur A . Remarquons que si f est considérée comme série formelle $t(f)$ n'est autre que le plus petit entier $k \geq 0$ tel que $f_k \neq 0$ si on écrit f sous la forme $f = f_0 + f_1 + \dots + f_k + \dots$ où f_i est la partie homogène de degré i . Ces topologies ω et t sont des cas particuliers de topologies définies de façon plus générale.
- 9) Dans le groupe G des inversibles de A on peut définir une fonction logarithme et une fonction puissance d'exposant quelconque.
- 10) Soit A un anneau commutatif, unitaire et intègre tel que pour tout entier $n \geq 0$ l'anneau des séries formelles sur A en n indéterminées soit factoriel. Alors l'anneau des séries formelles sur A en une infinité dénombrable d'indéterminées est lui aussi factoriel. Ainsi A et B sont factoriels.
- 11) Si $f \in A$ on appelle support de f , noté $s(f)$ l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$ (f non nulle). On appelle support premier de f , noté $s_1(f)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent un élément au moins de $s(f)$. Le support premier correspond à l'ensemble des indéterminées par rapport auxquelles f est une série formelle non constante.
- L'ensemble des f à support premier fini est une sous algèbre locale de A dans laquelle elle est algébriquement fermée. Il est factoriel.
- 12) Une fonction est multiplicative si $f(xy) = f(x)f(y)$ quand $(x,y) = 1$ et si $f(1) = 1$. Elle est factorisable si $f(xy) = f(x)f(y)$ quels que soient x et y .

13) L'ensemble M des multiplicatives est un sous groupe fermé (ω -topologie) du groupe des inversibles. Toute multiplicative se décompose de façon unique en un produit fini ou infini, convergent (ω) de multiplicatives dont le support premier n'a qu'un élément.

14) On note fg le produit de deux fonctions de A défini par $(fg)(x) = f(x)g(x)$ où x entier > 0 .

Pour que σ soit factorisable il faut et il suffit que l'application $f \rightarrow \sigma f$ soit un endomorphisme de A . Pour que ce soit un automorphisme il faut et il suffit que σ soit jamais nulle (i.e. $\sigma(x) \neq 0$ quel que soit x). Considérée comme série formelle σf est la série obtenue à partir de f par la substitution $X_i \rightarrow \sigma(p_i)X_i$. Si σ est factorisable elle est inversible et son inverse est $\mu\sigma$ où μ est la fonction de Moebius : $\sigma * \mu\sigma = u$.

Pour que σ soit factorisable il faut et il suffit que σ soit multiplicative et que $\sigma^{*-1} = \mu\sigma$ (σ^{*-1} désignant l'inverse de σ pour le produit de convolution). Si σf est irréductible (dans l'anneau factoriel A) alors f est irréductible.

Quand $\text{Log}(f)$ existe alors $\text{Log}(\sigma f)$ existe et on a $\text{Log}(\sigma f) = \sigma \text{Log}(f)$. De même $\exp(\sigma f) = \sigma \exp(f)$.

15) Si F^* est le sous groupe de l'ensemble M des multiplicatives engendré par les factorisables alors F^* est dense dans M pour la ω -topologie.

16) Une fonction a est additive si $a(xy) = a(x) + a(y)$ quand $(x,y) = 1$ et complètement additive (en abrégé ca) si $a(xy) = a(x) + a(y)$ pour tout x et tout y .

Pour que a soit ca il faut et il suffit que $a = e * \text{Log}(m)$ où m est multiplicative et e est la fonction définie par $e(x) = 1$ quel que soit x (c'est l'inverse de la fonction de Moebius). Il est encore équivalent de dire que $\mu * a(p^n) = \mu * a(p)$ pour tout nombre premier p et tout entier $n \geq 0$. Pour que a soit ca il faut et il suffit que l'application $f \rightarrow af$ soit une dérivation de l'algèbre A .

II Les Algèbres A_σ

1) Soit σ une factorisable jamais nulle. Une fonction $f \in A$ est dite σ -convergente si la série $\sum f(x) \sigma(x)$ converge absolument : on note $\sum |f\sigma| < +\infty$ et on appelle A_σ l'ensemble des fonctions σ -convergentes.

A_σ est une algèbre normée complète sur $\mathbb{C}$, la norme étant $N_\sigma(f) = \sum_x |f\sigma|$ et l'ensemble des f telles que $\sum f(x)\sigma(x)$ converge est un A_σ -module (Th. de Mertens)

2) Les algèbres A_α et A_β sont isomorphes et isométriques pour toutes α et β jamais nulles (pour leur topologie respectives définies à partir de N_α et N_β)

3) Pour que A_α soit contenue dans A_β il faut et il suffit que $|\beta| \leq |\alpha|$ c'est-à-dire $|\beta(x)| \leq |\alpha(x)|$ pour tout x . Elles sont différentes si $\alpha \neq \beta$.

Si $A_\alpha \subset A_\beta$ alors A_α n'est ni ouvert ni fermé dans A_β - en fait elle est partout dense dans A_β - et la topologie induite sur A_α par celle de A_β est strictement moins fine que celle de A_α .

4) A_α n'est pas l'intersection des algèbres A_β qui contiennent strictement A_α . Si f appartient à cette intersection et n'est pas dans A_α alors le support premier de f est l'ensemble de tous les premiers. De plus quel que soit x dans le support de f il existe un multiple de x dans le support de f .

Résultat analogue pour la réunion des algèbres A_γ contenues dans A_α .

L'ALGÈBRE A_e

5) C'est l'ensemble des f telles que $\sum_x |f(x)|$ converge. C'est aussi l'ensemble de f telles que $|f * e(x)|$ soit borné (On a $\sum_x |f(x)| = \sup_x |f * e(x)|$). C'est aussi la limite projective des A_α pour le système d'application $f \rightarrow f \frac{\alpha}{\beta}$.

6) Pour que m , multiplicative appartienne à A_e il faut et il suffit que $\sum_{p,n} |m(p^n)|$ converge et on a l'égalité bien connue $\sum m(x) = \prod_p (1 + m(p) + m(p^2) + \dots)$

Pour que σ , factorisable appartienne à A_e il faut et il suffit que $\sum |\sigma(p)|$ converge et que $|\sigma(p)| < 1$. Si $\sigma \in A_e$ elle est inversible dans A_e .

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548607_0007

7) $f \in A_e \Rightarrow \sup \sum |f\sigma| < +\infty$ où $\sigma \in A_e$ et l'on a $N(f) = \sup_{\sigma} N(f\sigma)$. En conséquence, si $f \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ où $A_{\alpha} \supset A_e$ et $A_{\alpha} \neq A_e$ et si f a ses parties homogènes de degré n nulles si n est grand alors $f \in A_e$.

8) L'application $f \rightarrow \sigma f$ est un endomorphisme de A_e si σ est une factorisable telle que $|\sigma| \leq e$ (i.e. $|\sigma(x)| \leq 1$ pour tout x). C'est un automorphisme si $|\sigma| = e$.

D'où $\sigma \underline{a}$ est un idéal si $\underline{a}$ est un idéal et $|\sigma| = e$, un sous groupe additif si $|\sigma| \neq e$.

9) Le rayon spectral $\nu(f) = \lim_n N(f^{*n})^{1/n} = \inf_n N(f^{*n})^{1/n}$ est une norme et l'on a $[\sum |f(x)|^2]^{1/2} \leq \nu(f) \leq N(f)$.

10) Les idéaux maximaux de A_e sont les idéaux de la norme $\underline{m}_{\sigma} =$ ensemble des f telles que $\sum f(x)\sigma(x) = 0$ où σ est une factorisable $\leq e$ en module. En particulier $\underline{m}_{\underline{u}}$ est l'intersection avec A_e de l'idéal maximal de A . En conclusion f est inversible dans A_e si $\sum f\sigma \neq 0$ quel que soit σ tel que $|\sigma| \leq e$. Il y a correspondance biunivoque entre les maximaux et l'ensemble $\underline{M}$ des σ telles que $|\sigma| \leq e$. Si $|\sigma| = e$ on a $\underline{m}_{\sigma} = \bar{\sigma} \underline{m}_e$ où $\bar{\sigma}$ est la fonction conjuguée de σ . L'homomorphisme $f \rightarrow \sum \sigma f$ est uniformément continu et surjectif.

11) Si $f \in A_e$ si $f(1) \neq 0$ et si $\sum f^{-1} \sigma$ converge pour tout $\sigma \in \underline{M}$ alors $f^{-1} \in A_e$.

12) L'intersection des maximaux est (0) . On a plus : l'intersection des maximaux réels (σ réelle) est (0) , l'intersection des maximaux à support premier fini est (0) de même que celle des maximaux de module e . Toutefois l'intersection des maximaux réels de module e est $\neq (0)$.

13) Le spectre de f est l'ensemble des $\sum f\sigma$ noté $Sp(f)$. C'est un compact non vide de $\mathbb{C}$ d'intérieur non vide si f n'est pas constante ($f \neq u$). Il est contenu dans le disque centré à l'origine de rayon $\nu(f)$. On a $Sp(\alpha f) \subset Sp(f)$ et $\bigcap_{\alpha} Sp(\alpha f) = f(1)$. De plus $Sp(f)$ est connexe par arcs.

- 14) $\underline{M}$ l'ensemble des maximaux est muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications $f \mapsto \sum f\sigma$. Cette topologie est définie par la distance $d(\alpha, \beta) = \sum |\alpha(p) - \beta(p)| / 2^p$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers. $\underline{M}$ est un espace compact, connexe isomorphe à K^N où K est le disque unité de $\mathbb{C}$. A_e s'identifie donc à une sous algèbre de l'algèbre $C(\underline{M})$ des fonctions continues sur $\underline{M}$ à valeurs complexes. Elle n'est pas fermée pour la norme de la convergence uniforme.
- 15) Pour tout $f \in A_e$, $\sum f\sigma$ atteint son maximum pour $\sigma \in \underline{M}^0$ ensemble des σ telles que $|\sigma| = e$. C'est le plus petit fermé possédant cette propriété (frontière de Silov).
- 16) Spectre local : Soit P une partie de l'ensemble des nombres premiers. Toute f s'écrit $\sum f_i T_i$ en tant qu'élément de l'algèbre large du demi-groupe P . Soit $\sigma \in \underline{M}$ et C_σ l'opérateur de A_e défini par $C_\sigma(f) = \sum f_i \sigma(i)$. C'est un endomorphisme continu de A_e . A tout $f \in A_e$ on associe l'ensemble des $C_\sigma(f)$ où $\sigma \in \underline{M}$ appelé le spectre partiel $Sp_P(f)$ de f relatif à P . C'est une partie compacte et connexe de A_e contenue dans la boule de centre 0 de rayon $N(f)$. Si $A_{e,P'}$ désigne la sous algèbre de A_e des f à support premier contenu dans $P' =$ complémentaire de P alors A_e s'identifie à une sous algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur la partie compacte $\underline{M}_P$ de $\underline{M}$ (isomorphe à K^P) à valeurs dans $A_{e,P'}$.
- 17) Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $\nu(f) = N(f)$
 2. $f = c g \sigma$ où $c \in \mathbb{C}$, g est réelle positive et σ factorisable
 3. $N(f^n) = N(f)^n$ pour tout n entier > 0
 4. $|f^{*n}(x)| = |f|^{*n}(x)$ pour n et x entiers > 0 .
- 18) Soit G_e le groupe des inversibles de A_e . Alors G_e est connexe par arcs et le sous groupe G_1 des f telles que $f(1) = 1$ est aussi connexe. Le sous groupe M_1 des multiplicatives inversibles est lui aussi connexe.

19) Propriétés simples des factorisables et de leur spectre. En particulier le sous groupe F^* engendré par les factorisables de A_e est dense dans le sous groupe des multiplicatives inversibles.

20) Fonctions exp et Log. On définit $\exp(f) = u + f + \frac{1}{2} f^2 + \dots$ c'est une application surjective et continue de A_e sur G_e et l'on a

$$N(\exp(f)) \leq e^{N(f)}, \quad \sum \exp(f) \sigma = e^{\sum f \sigma}, \text{ etc...}$$

$\text{Log}(f)$ est définie comme solution de $\exp(g) = f$. La fonction Log est définie sur G_e et induit un homeomorphisme de G_1 sur l'idéal maximal $\underline{m}_u$.

21) On a $v(f a^{t(x)}) \leq a^k v(f)$ si f s'écrit $f = f_k + f_{k+1} + \dots$ si f_n est la partie homogène de degré n de f (lemme de Schwarz)

22) Soient les deux fonctions de A_e dans $\mathbb{R}^+$ définies par

$$\rho_N(f) = \inf \frac{N(f*g)}{N(g)} \quad \text{et} \quad \rho_v(f) = \inf \frac{v(f*g)}{v(g)}$$

On a les propriétés suivantes :

- a. $|\rho_N(f) - \rho_N(g)| \leq N(f-g)$ et $|\rho(f) - \rho(g)| \leq v(f-g)$
- b. $\rho_N(f) \rho_N(g) \leq \rho_N(f*g) \leq \rho_N(f) N(g)$
- c. $\rho_N(f) \leq v(f) \leq N(f)$
- d. $\rho_v(f) \rho_v(g) \leq \rho_v(f*g) \leq \rho_v(f) v(g)$
- e. $\rho_v(f) = \inf |\sum f \sigma|$ où $|\sigma| = e$ et $\rho_v(f) \leq [\sum |f(x)|^2]^{1/2}$.

En outre

$$f. \quad \rho_N(f) \leq \rho_v(f).$$

On dit que f est diviseur de zéro topologique fort ou dzt fort si $\rho_N(f) = 0$ et diviseur de zéro topologique faible si $\rho_v(f) = 0$. Soient Z_N et Z_v l'ensemble des dzt forts (resp. faible) et $\overline{G}^N$ (resp. $\overline{G}^v$) l'adhérence du groupe G des inversibles dans la topologie forte (resp. faible). $\overline{G}^N$ et $\overline{G}^v$ sont multiplicativement stables et l'on a

$$\overline{G}^N - G \subset \overline{G}^v - G \subset Z_v \subset Z_N.$$

g. Si $f \in A_e$ est non nulle il existe α jamais nulle telle que $\rho_N(f\alpha) > 0$

h. Si $f \in A_e$ est non inversible et si $f(1) \neq 0$ alors il existe σ jamais nulle telle que $\rho_V(f\sigma) = 0$.

23) Si $f \in A_e$ on dit que $\sigma \in \underline{M}$ est un zéro de f si $\Sigma f\sigma = 0$. On note $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f . $Z(f)$ est une partie compacte de $\underline{M}$ ayant les propriétés suivantes :

$$Z(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \text{ est inversible}$$

$$Z(f) = \underline{M} \Leftrightarrow f = 0$$

$$Z(f * g) = Z(f) \cup Z(g)$$

$$Z(f+g) \supset Z(f) \cap Z(g)$$

si $\alpha \in \underline{M}$ alors $\alpha Z(\alpha f) \subset Z(f)$ et égalité si $\alpha \in \underline{M}^0$

$Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \Leftrightarrow (f) + (g) = A_e$ (où (f) et (g) sont les idéaux principaux engendrés par f et g)

$$Z(f) \ni u \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$Z(\bar{f}) = \overline{Z(f)}$$

Si $\Sigma f\sigma$ est nulle sur un ouvert non vide de $\underline{M}$ alors $f = 0$

Si $f(1) \neq 0$ et si f n'est pas inversible alors f a un zéro jamais nul.

24) Si $f \in A_e$ on appelle domaine d'inversibilité de f , noté $I(f)$ l'ensemble des $\sigma \in \underline{M}$ telles que $\Sigma f\sigma$ soit inversible dans A_e .

$I(f)$ est ouvert dans $\underline{M}$ (vide si et seulement si $f(1) = 0$)

$I(f)$ est le plus grand des idéaux du demi groupe $\underline{M}$ qui ne rencontrent pas $Z(f)$

$$I(f) = \bigcap_{\alpha} \bigcup Z(\alpha f)$$

$I(f)$ est l'ensemble des σ telles que pour tout $\alpha \in Z(f)$ il existe p tel que

$$|\sigma(p)| < |\alpha(p)|$$

25) On appelle annulateur de f noté $A(f)$ l'ensemble des $\alpha \in \underline{M}$ telles que $f\alpha = 0$.

L'annulateur de f est vide si et seulement si $f(1) \neq 0$ et c'est $\underline{M}$ si et seulement

si $f = 0$. C'est une partie compacte de $Z(f)$ d'intérieur vide si $f \neq 0$.

$A(f)$ est le plus grand idéal du demi groupe $\underline{M}$ qui est contenu dans $Z(f)$ $A(f) = \bigcap_{\alpha} Z(\alpha f)$

$Z(\alpha f) = \bigcap_{\sigma} Z(\sigma f)$ où $|\sigma| = e$

$A(f) = \bigcap_{\lambda} I(\lambda u + f)$ où $\lambda \neq 0$

26) Les propositions suivantes sont équivalentes :

a. $Z(f)$ est un idéal du demi groupe $\underline{M}$

b. $Z(f) = A(f)$

c. $f = u_n * j$ pour un certain $n > 0$ où la fonction u_n est définie par

$u_n(x) = 1$ si $x = n$ et 0 si $x \neq n$. et j est inversible

d. Pour tout $\sigma \in \underline{M}$ la fonction $f\sigma$ appartient à l'idéal principal engendré par f .

e. L'idéal principal $(f\alpha)$ est faiblement fermé pour tout $\alpha \in \underline{M}$

f. L'idéal principal $(f\alpha)$ est fortement fermé pour tout $\alpha \in \underline{M}$

27) Si $\underline{a}$ est un idéal de Λ_e on définit $Z(\underline{a}) = \bigcap_f Z(f)$ où $f \in \underline{a}$, $A(\underline{a}) = \bigcap_{\alpha} Z(\alpha \underline{a})$

où $f \in \underline{a}$, $I(\underline{a}) = \bigcap_{\alpha} \bigcap_{\sigma} Z(\sigma \alpha \underline{a})$ et $J(\underline{a}) = \bigcup_f I(f)$ où $f \in \underline{a}$.

En dehors d'un certain nombre de propriétés on a :

$I(\underline{a})$ est le plus grand idéal du demi groupe $\underline{M}$ qui ne rencontre pas $Z(\underline{a})$

$I(\underline{a}) = \left\{ \sigma \text{ telles que quel que soit } \alpha \in Z(\underline{a}) \text{ il existe } p \text{ tel que } |\sigma(p)| < |\alpha(p)| \right\}$

$I(\underline{a}) = J(\underline{a})$

Propriétés analogues pour $\Lambda(\underline{a})$.

L'ALGÈBRE $\hat{\Lambda}_e$

$\hat{\Lambda}_e$ est la complétée de Λ_e pour la norme v . Si $\underline{M}_1$ désigne l'ensemble des factorisables de $\underline{M}$ qui sont dans Λ_e on a :

a. Si $\hat{f} \in \hat{\Lambda}_e$ il existe une suite de coefficients complexes $f(n)$ $n = 1, 2, \dots$ tels que pour tout $\sigma \in \underline{M}_1$ on ait $\hat{f}(\sigma) = \sum f(x) \sigma(x)$ et pour tout $\alpha \in \underline{M}$ on ait $\hat{f}(\alpha) = \lim \sum f(x) \sigma(x)$ quand σ tend vers α en restant dans $\underline{M}_1$ (dense dans $\underline{M}$).

b. Si $\hat{f} \in C(\underline{M})$ et s'il existe des coefficients $f(x)$ tels que quelle que soit $\sigma \in \underline{M}_1$ on ait $\hat{f}(\sigma) = \sum f(x) \sigma(x)$ alors $\hat{f} \in \hat{\Lambda}_e$.

c. Si $\hat{f} \in \hat{\Lambda}_e$ alors $\sum |f(x)|^2 \leq v(f)^2$ et par suite $f \in \bigcap_{\alpha} \Lambda_{\alpha}$ telles que $\sum |\alpha(x)|^2$ converge.

d. $\hat{\Lambda}_e$ est la fermeture uniforme dans $C(\underline{M})$ des fonctions finies (ie $f(x) = 0$ si x est grand)

Conséquence : l'espace des maximaux est encore $\underline{M}$ et les σ où $|\sigma| \leq e$ définissent un homomorphisme continu de $\hat{\Lambda}_e$. De plus il n'y a pas d'autre factorisable dans $\hat{\Lambda}_e$ que celles de Λ_e .

III Les Algèbres $\hat{\Lambda}_e$, S et E

1) $f \in A$ est convergente s'il existe α telle que f soit α -convergente

Soit S l'ensemble des fonctions convergentes

S est une sous algèbre locale de A d'idéal maximal $\underline{m} \cap S$. On a $f \in S \Leftrightarrow$ il existe α (jamais nulle) telle que $\sum f\alpha$ converge $\Leftrightarrow$ il existe $c \in R_+$ et σ tels que pour tout x on ait $|f(x)| \leq |c \cdot \sigma(x)|$.

Une fonction complètement additive appartient à S . Si f en tant que série formelle est un polynôme par rapport à chaque indéterminée alors f est convergente.

Une fonction à support premier fini n'appartient pas nécessairement à S mais si e_n est la factorisable définie par $e_n(p_i) = 1$ si p_i est le nombre premier de rang $i \leq n$ et 0 ailleurs alors on a l'équivalence suivante :

$f \in S \Leftrightarrow$ il existe α telle que fe_n soit α -convergente pour tout n .

2) Le produit d'une fonction convergente par une fonction non convergente est non convergente.

3) Soit $\bar{S}$ l'ensemble des f telles que $fe_n \in S$ quel que soit n . C'est l'adhérence de S dans A par rapport à une certaine topologie. C'est aussi la limite projective des algèbres de fonctions convergentes en un nombre fini d'indéterminées. Alors $\bar{S}$ est factoriel. De même S est factoriel.

4) $f \in A$ est entière si f est α -convergente pour tout α . Pour que $f \in E$ (ie soit entière) il faut et il suffit que $\overline{\lim}_n N_e(f_n)^{1/n} = 0$ si f_n est la partie homogène de degré n de f .

5) Propriété principale : si f est entière alors le support premier de f n'a qu'un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire, considérée comme série formelle elle ne dépend que d'un nombre fini d'indéterminées.

IV Fonctions analytiques

On se propose de donner une définition de fonction analytique d'une infinité dénombrable de variables complexes $(z) = (z_i) \in \mathbb{C}^N$

La topologie produit sur $\mathbb{C}^N$ étant trop restrictive on prend comme topologie celle où un système fondamental de voisinages d'un point quelconque (a_i) est constitué par les polydisques $\Gamma = \{ (z_i) \mid |z_i - a_i| < r_i \text{ avec } r_i > 0 \}$ centrés en (a_i) ("box-topology")

On dit alors qu'une fonction $\hat{f}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ est analytique dans Ω si on a dans tout polydisque ouvert de centre $\omega \in (\omega_i) \in \Omega$ et contenu dans Ω

$\hat{f}(\alpha) = \sum_{\omega} f_{\omega}(n) (\alpha - \omega)(n)$ où $f_{\omega}(n)$ est une suite de coefficients complexes et où la série est absolument convergente dans un tel polydisque.

Dans $\mathbb{C}^N$ il n'y a pas d'ouvert connexe mais on a les propriétés affaiblies de connexité ce qui amène à la définition suivante :

Connexion sur un ensemble : Soit X un ensemble non vide. Une famille non vide $\mathcal{C}$ de parties de X est une connexion si $A_i \in \mathcal{C}$ et $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$ entraîne $\bigcup_i A_i \in \mathcal{C}$.

On appelle connexion engendrée par une famille de parties B_i de X la plus petite connexion sur X qui contient les B_i .

Soient X un espace topologique, Λ une famille de parties de X . Un ouvert $A \subset X$ est dit Λ -connexe s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

1°) il est connexe dans X

2°) quelque soit la partition de A en deux ouverts non vides il existe un ensemble (non vide) de A qui rencontre les 2 parties et qui est contenu dans A .

Dans ces conditions si la famille des ouverts Δ -connexes est non vide elle forme une connexion.

Dans C^N on considère la famille Δ formée de tous les polydisques ouverts.

Proposition: Soit $\hat{f}$ définie sur le disque ouvert $\Gamma = \{ (z_i) \mid |z_i - c_i| < r_i \}$ par $\hat{f}(\alpha) = \sum f(x) (\alpha - c) (x)$ où la série est absolument convergente pour tout $\alpha \in \Gamma$.

Alors $\hat{f}$ est analytique sur Γ et si $\hat{f}$ est nulle sur un ouvert contenu dans Γ alors $\hat{f}$ est identiquement nulle dans Γ .

Théorème: Soit $\hat{f}$ analytique sur un ouvert Ω Δ -connexe. Si $\hat{f}$ est nulle sur un ouvert $U \subset \Omega$ alors $\hat{f}$ est identiquement nulle sur Ω .

Si Ω est Δ -connexe l'ensemble $A(\Omega)$ des fonctions analytiques sur Ω est une algèbre commutative à élément unité et intègre. Enfin l'ensemble des germes des fonctions analytiques en un point ω c'est-à-dire l'ensemble $\varinjlim A(\Omega)$ où $\Omega \ni \omega$ s'identifie à l'ensemble S des fonctions convergentes.

